(6) 6/10

Εφαρμογή

$\delta(A) = \sup \rho(x,y)$, A φραγμένο $\iff \delta(A)<\infty$

A,B φραγμένα , τότε $\delta(A\cup B) \leq \delta(A)+\delta(B)+\rho(A,B)$

(Δηλ. $A\cup B$ είναι φραγμένο)

Απόδειξη

x,y τυχόντα στοιχεία εν $A\cup B$

$x\in A$ & $y\in A \implies \rho(x,y)\leq\delta(A)\leq M$

$x\in B$ & $y\in B \implies \rho(x,y)\leq\delta(B)\leq M$

$x\in A$ & $y\in B \overset{(*)}{\implies} (\forall \nu\in\mathbb{N})(\exists z\in A)(\exists w\in B):\rho(z,w)\leq\rho(A,B)+\frac{1}{\nu}$

$\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,w)+\rho(w,y)\leq\delta(A)+\rho(A,B)+\frac{1}{\nu}+\delta(B)$, $\nu\in\mathbb{N}$

$\implies \rho(x,y)\leq\delta(A)+\rho(A,B)+\delta(B)=M$

Άρα $\sup\limits_{(x,y)\in(A\cup B)^2}\rho(x,y)\leq M\implies\delta(A\cup B)\leq M$

Αποδείχθηκε (με εκκρεμότητα την (*))

Απόδειξη της (*)

Έστω δεν ισχύει η (*) τότε:

$(\exists\nu_0\in\mathbb{N})(\forall z\in A)(\forall w\in B):\underbrace{\rho(z,w)>\rho(A,B)+\frac{1}{\nu_0}}$

$\rho(A,B)=\inf\limits_{(z,w)\in A\times B}\rho(z,w)\geq\rho(A,B)+\frac{1}{\nu_0}\implies$

$\rho(z,w)\leq\rho(A,B)+\frac{1}{\nu}$

Το φανταζόμαστε ή με σχήμα ή με τον ορισμό του infimum από τον ΑΠΕΙ 1

Ορισμός (σφαιρική περιοχή)

(E,ρ) , $\alpha\in E$, $r>0$

$B(\alpha,r)=\{x\in E:\rho(x,\alpha)<r\}\subseteq E$

$C(\alpha,r)=\{x\in E:\rho(x,\alpha)\leq r\}$

Ορισμός

$E\supseteq U$ περιοχή του α $(U=U(\alpha))\iff(\exists\ r>0):B(\alpha,r)\subseteq U\ (\implies\alpha\in U=U(\alpha))$

Πρόταση

Τυχούσα σφαιρική περιοχή είναι περιοχή κάθε σημείου της.

Απόδειξη

Έστω $B(\alpha,r)$ τυχούσα σφαιρ. περιοχή ενός σημείου α κ β τυχόν σημείο της $B(\alpha,r)$

Θεωρούμε $r'=r-\rho(\alpha,\beta) \xLeftrightarrow[r'=r-\rho(\alpha,\beta)>0]{\beta\in B(\alpha,r)\Rightarrow \rho(\alpha,\beta)<r} r'>0$

$B(\beta,r') \overset{(?)}{\subseteq} B(\alpha,r)$ ισχύει γιατί:

$x\in B(\beta,r') \iff \rho(x,\beta)<r' \Rightarrow \rho(x,\beta)<r-\rho(\alpha,\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x,\beta)+\rho(\beta,\alpha)<r \xRightarrow{\rho(x,\alpha)\leq\rho(x,\beta)+\rho(\beta,\alpha)} \rho(x,\alpha)<r \Rightarrow x\in B(\alpha,r)$

Άρα

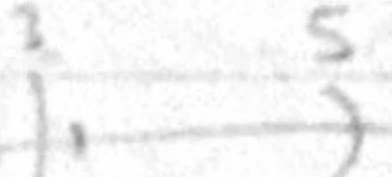
Κάθε σφαιρική περιοχή είναι περιοχή των σημείων της

Ο ευκλείδιος μ.χ. $(\mathbb{R},|\ |)$ είπαμε έχει μετρική $\rho(x,y)=|x-y|$ και

σφαιρική περιοχή $B(0,r)=\{x\in\mathbb{R}:\rho(x,0)<r\}=\{x\in\mathbb{R}:|x-0|<r\}=$
$=\{x\in\mathbb{R}:|x|<r\}=\{x\in\mathbb{R}:-r<x<r\}=(-r,r)$

άρα $B(a,r)=(a-r,a+r)$

π.χ.

$A=[3,5)$ $B(3,r)=(3-r,3+r)$  άρα

δεν είναι σφαιρ. περιοχή στο $[3,5)$

Πρόταση

Σε κάθε μ.χ. ισχύουν τα εξής

α) Τυχόν σημείο ανήκει σε κάθε περιοχή του

β) Η τομή πεπερασμένου πλήθους περιοχών ενός σημείου α είναι περιοχή του α

γ) Αν $U=U(a)$ κ $W\supseteq U$ τότε κ $W=W(\alpha)$

δ) Αν $U=U(a)$ τότε $\exists\, V\subseteq U$: η U να είναι περιοχή κάθε σημείου του V

(8)

Απόδειξη

α) $U = U(\alpha) \Rightarrow (\exists r>0) : B(\alpha,r) \subseteq U \xrightarrow{\alpha \in B(\alpha,r)} \alpha \in U$

γ) $U = U(\alpha) \Rightarrow (\exists r>0) : B(\alpha,r) \subseteq U \xrightarrow{U \subseteq W} (\exists r>0) : B(\alpha,r) \subseteq W$
άρα το W είναι περιοχή του σημείου α άρα
$W = W(\alpha)$

β) $U = U(\alpha)$ και $V = V(\alpha)$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$(\exists r_1>0) : B(\alpha,r_1) \subseteq U(\alpha)$ και $(\exists r_2>0) : B(\alpha,r_2) \subseteq V \Rightarrow$
$B(\alpha,r_1) \cap B(\alpha,r_2) \subseteq U \cap V$ με $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$

δ) $U = U(\alpha) \Rightarrow (\exists r>0) : B(\alpha,r) \subseteq U$
Αρκεί να ληφθεί $V = B(\alpha,r)$
Θεωρώ τυχόν $x \in B(\alpha,r)$. Τότε η $B(\alpha,r)$ είναι
περιοχή του $x \xrightarrow{U \supseteq B(\alpha,r)}$ U περιοχή του x

(E,ρ) διακριτός μ.χ. $\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

$B(\alpha,\frac{1}{2}) = \{x \in E : \rho(x,\alpha) < \frac{1}{2}\} = \{\alpha\}$
άρα

$B(\alpha,r) = \begin{cases} \{\alpha\}, & r \leq 1 \\ E, & r > 1 \end{cases}$ για π.χ. $B(\alpha,2) = E$

Στον $\mathbb{R}^2$:
$(\mathbb{R}^2, |\ |)$ με μετρική: $\rho((x,y),(z,w)) = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$

μ.ε.
$B(0,r) = B((0,0),r) = \{(x,y) : \rho((x,y),(0,0)) < r\} =$
$= \{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} < r\}$